SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018-2019
Môn thi: TOÁN CHUYÊN
Thời gian: 150 phút
Ngày thi: 03/06/2018

Câu 1(1 điểm): Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$. Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$

Câu 2 (2 điểm)

a) Giải phương trình : $4\sqrt{x+3}=1+4x+\dfrac{2}{x}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^3=1 \\ x^2+y^5=x^3+y^2 \end{cases}$

Câu 3 (2 điểm): Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ vuông tai A có đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC

a) Chứng minh rằng: $BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}$

b) Gọi D là điểm đối xứng của B qua H và gọi O là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC cắt AC tại K. Chứng minh rằng $BK\perp AO$

Câu 4 (1,5 điểm):

a) Chứng minh rằng $x^4-x+\dfrac{1}{2}>0$ với mọi số thực x

b) Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2-xy+y^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$

Câu 5 (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB. Đường thẳng AC cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Đường thẳng BK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại L.Các đường thẳng CL và KM cắt nhau tại E. Chứng minh rằng E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM

Câu 6 (2 điểm)

Các số nguyên dương từ 1 đến 2018 được tô màu theo quy tắc sau: Các số mà khi chia cho 24 dư 17 được tô màu xanh; các số mà khi chia cho 40 dư 7 được tô màu đỏ. Các số còn lại được tô màu vàng

a) Chứng tỏ rằng không có số màu được tô cả hai màu xanh và đỏ. Hỏi có bao nhiêu số được tô màu vàng

b) Có bao nhiêu cặp số $(a;b)$ sao cho a được tô màu xanh; b được tô màu đỏ và $|a-b|=2$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Ta có: $a+b+c=0 \Leftrightarrow b=-a-c$

$$\Rightarrow a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$$
$$\Leftrightarrow a^2=2(a+c+1)(a-a-c-1)$$
$$\Leftrightarrow a^2=2(a+c+1)(-c-1)$$
$$\Leftrightarrow a^2+2(a+c+1)(c+1)=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+2a(c+1)+2(c+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (a+c+1)^2+(c+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c+1=0 \\ c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow b=-a-c=1$$
$$\Rightarrow A=a^2+b^2+c^2=0^2+1^2+(-1)^2=2$$

Vậy $A=2$

Câu 2

Bài a. Giải phương trình : $4\sqrt{x+3}=1+4x+\dfrac{2}{x}$

Điều kiện : $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x\ne 0 \end{cases}$

$$4\sqrt{x+3}=1+4x+\frac{2}{x}$$
$$\Leftrightarrow 4x\sqrt{x+3}=x+4x^2+2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{x+3}+x+3-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x+3}\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\sqrt{x+3}=1 \\ 2x-\sqrt{x+3}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}=2x-1 \\ \sqrt{x+3}=2x+1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-1\ge 0\\ x+3=1-4x+4x^2\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1\ge 0\\ x+3=1+4x+4x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ 4x^2-5x-2=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+3x-2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{57}}{8}(tm)\\ x=\dfrac{5-\sqrt{57}}{8}(ktm)\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}(tm)\\ x=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}(ktm)\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có hệ phương trình tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{5+\sqrt{57}}{8};\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}\right\}$

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^3=1(1)\\ x^2+y^5=x^3+y^2(2)\end{cases}$

Lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta được:

$$y^5-y^3=x^3+y^2-1$$
$$\Leftrightarrow y^3.\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)=x^3$$
$$\Leftrightarrow \left(y^2-1\right).\left(y^3-1\right)=x^3$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y^2\right)\left(1-y^3\right)=x^3(*)$$

Mà từ (1) $\Rightarrow x^2=1-y^3$

Kết hợp với (1) và (*) ta được: $\begin{cases}x^2=1-y^3\\ x=1-y^2\end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \left(1-y^2\right)^2 = 1-y^3$

$\Leftrightarrow (1-y)^2.(1+y)^2 = (1-y)\left(1+y+y^2\right)$

$\Leftrightarrow (1-y).\left[(1+y)^2(1-y)-1-y-y^2\right]=0$

$\Leftrightarrow (1-y).\left(1+y-y^2-y^3-1-y-y^2\right)=0$

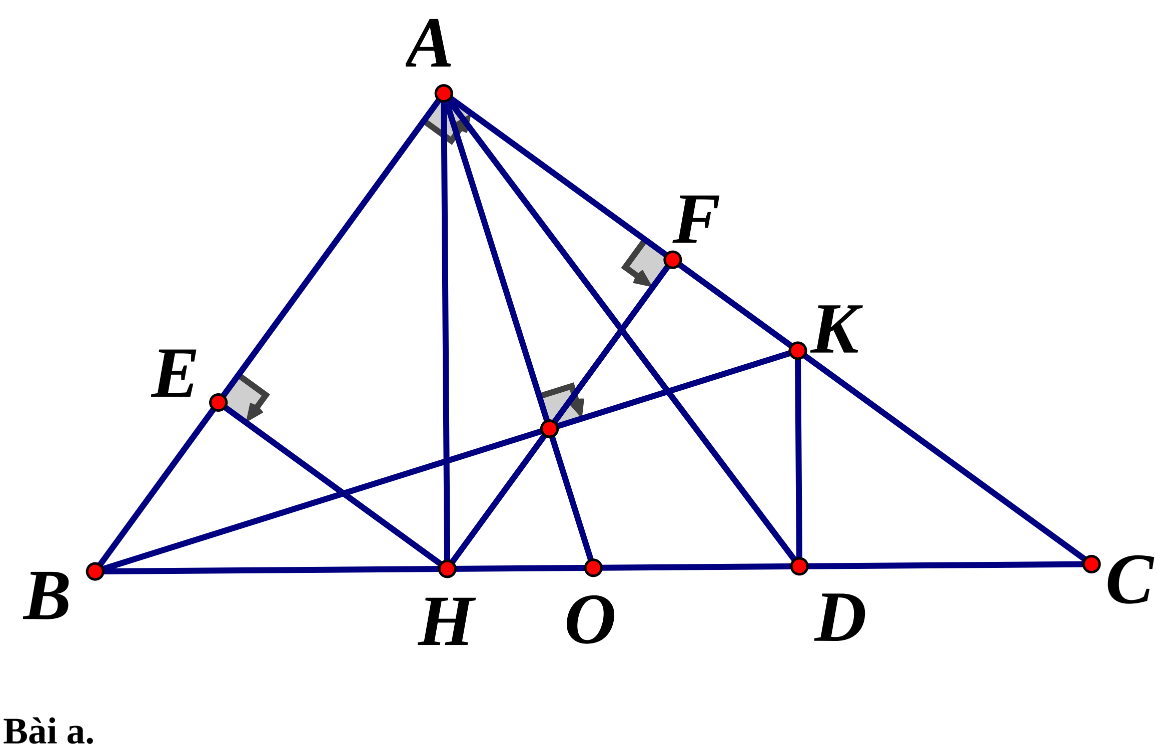
$\Leftrightarrow (1-y).\left(-2y^2-y^3\right)=0$

$\Leftrightarrow (1-y).y^2.(-2-y)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \\ y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-2 \\ x=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S=\{(-2;-3);(0;1);(1;0)\}$

Câu 3.



Bài a.

Dễ thấy $AEHF$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông) $\Rightarrow AF = EH; AE = FH$

Ta có

$$BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}$$
$$\Leftrightarrow\left(BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}\right)^2=\left(AH\sqrt{BC}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow BE^2.CH+CF^2.BH+2.BE.CF.\sqrt{CH.BH}=AH^2.BC(*)$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ta có

$$AH^2=BH.CH(1)$$

Xét ΔEBH và ΔFHC ta có: $BEH=HFC=90^0$; $EBH=FHC$ (đồng vị)

$$\Rightarrow\Delta EBH\sim\Delta FHC(g.g)$$
$$\Rightarrow\frac{BE}{FH}=\frac{EH}{FC}=\frac{BH}{HC}\Rightarrow\begin{cases}BE.FC=FH.EH=AE.AF\\EH.HC=FC.BH\\BE.HC=FH.BH\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}BE^2.CH=BE.FH.BH=BE.AE.HB=HF^2.HB\\CF^2.BH=CF.EH.HC=CF.AF.HC=HF^2.HC\\2BE.CF.\sqrt{CH.BH}=2.AE.AF.AH\end{cases}$$
$$\Rightarrow(*)\Leftrightarrow HE^2.HB+HF^2.HC+2AE.AF.AH=AH^2.BC$$
$$\Leftrightarrow\left(AH^2-HE^2\right).HB+\left(AH^2-AF^2\right).HC+2AE.AF.AH=AH^2.BC(Pitago)$$
$$\Leftrightarrow AH^2.(HB+HC)-\left(AE^2.HB-2AE.AF.AH+AF^2.HC\right)=AH^2.BC$$
$$\Leftrightarrow AH^2.BC-\left(AE^2.HB-2AE.AF.AH+AF^2.HC\right)=AH^2.BC$$
$$\Leftrightarrow AE^2.HB-2.AE.AF.AH+AF^2.HC=0$$
$$\Leftrightarrow AE^2.HB+AF^2.HC=2AE.AF.AH$$

Ta có: $\Delta BEH\sim\Delta HEA(g-g)\Rightarrow\frac{EH}{EA}=\frac{BH}{HA}\Leftrightarrow AE.BH=EH.HA$

$$\Delta AHF\sim\Delta HCF(g-g)\Rightarrow\frac{AH}{HC}=\frac{AF}{HF}\Leftrightarrow AF.HC=AH.HF$$
$$\Rightarrow AE^2.BH+AF^2.HC=AE.EH.HA+AF.AH.HF$$
$$=AE.AF.HA+AF.AH.AE=2.AE.AF.AH(dpcm)$$

Vậy $BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}$

Câu b

Gọi M là giao điểm của BK và AO

Xét tứ giác $ABDK$ ta có: $BAK + BDK = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow ABDK$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow DBK = DAK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DK)

Xét ΔBAD ta có: $\begin{cases} AH \perp BD \\ BH = HD \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác cân tại A

$\Rightarrow BAH = HAD$ (AH là phân giác của BAD)

$\Rightarrow DBK = DAK - BAD = BAC - 2.BAH = BAC - 2.BCA\left(BCA = BAH\right)$

Theo tính chất góc ngoài của tam giác và do ΔAOC cân tại O nên ta có:

$BOA = OCA + OAC = 2.BCA$

$\Rightarrow DBK = BAC - 2.BCA = 90^0 - BOA$

$\Leftrightarrow DBK + BOA = 90^0$

Xét ΔBOM ta có: $BOM + MBO = 90^0 (cmt) \Rightarrow \Delta BOM$ vuông tại M

Hay $\Rightarrow BK \perp AO (dpcm)$

Câu 4

Bài a.

Ta có $x^4 - x + \frac{1}{2} = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ (vô lý), do đó dấu bằng không xảy ra

Vậy $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$ với mọi số thực x

Bài b

Ta có: $x^2 - xy + y^2 = 3 \Rightarrow P - xy = 3 \Rightarrow xy = P - 3$

Áp dụng BĐT Cô si cho hai số $x^2; y^2$ ta có: $x^2 + y^2 \ge 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy| \Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2} \ge |xy|$

$$\Rightarrow -\frac{x^2+y^2}{2} \le xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow -\frac{P}{2} \le xy \le \frac{P}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{P}{2} \le P - 3 \le \frac{P}{2}$$

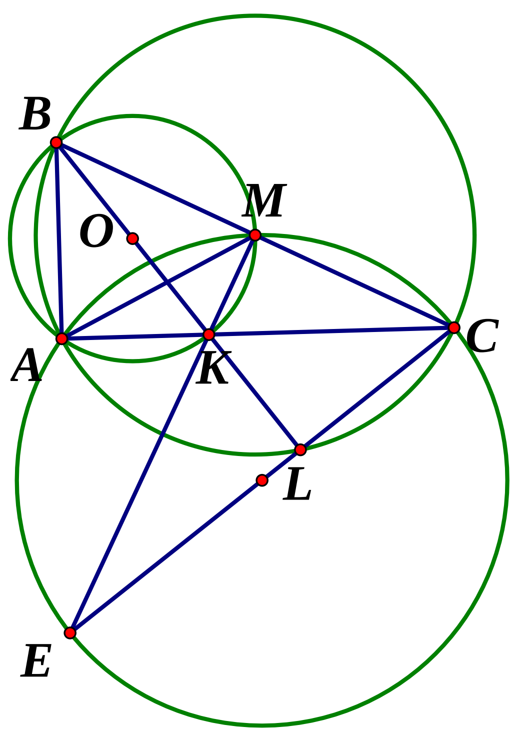
$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{P}{2} \le P - 3 \\ P - 3 \le \dfrac{P}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le \dfrac{3P}{2} \\ \dfrac{P}{2} \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le P \le 6$$

Dấu bằng xảy ra $\Rightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x^2 + x^2 = 3 \\ x^2 - x^2 + x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = |y| = 1 \\ |x| = |y| = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy $P_{\max} = 6 \Leftrightarrow |x| = |y| = \sqrt{3}; P_{\min} = 2 \Leftrightarrow |x| = |y| = 1$

Câu 5



Xét đường tròn (O) có $BAK = 90^0 \Rightarrow BAK$ nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

$\Rightarrow BK$ là đường kính của đường tròn (O)

Ta có BMK là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) $\Rightarrow BMK = 90^0$ hay $KM \perp BC$

$\Rightarrow EM$ là đường cao của tam giác EBC

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có $BAC = 90^0 \Rightarrow BAC$ nội tiếp chắn nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính BC

Ta có: BLC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
$\Rightarrow BLC = 90^0$ hay $BL \perp LC \Rightarrow BL \perp EC \Rightarrow BL$ là đường cao ΔEBC

Xét ΔEBC ta có: EM và BL là hai đường cao của tam giác cắt nhau tại K

$\Rightarrow K$ là trực tâm $\Delta EBC \Rightarrow KC \perp BE$

Mà $KC \perp BA(gt) \Rightarrow B; A; E$ thẳng hàng $\Rightarrow EAC = 90^0$

Xét tứ giác $AECM$ ta có: $EAC = EMC = 90^0$

Mà hai góc này cùng nhìn đoạn EC

$\Rightarrow AECM$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

Hay E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM (đpcm).

Câu 6.

Bài a.

Giả sử có một số a được tổ cả màu xanh và màu đỏ $\left(a \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 2018\right)$

$\Rightarrow a$ chia cho 24 dư 17 hay $a = 24k + 17\left(k \in \mathbb{N}^*, k \le 83\right)$

$\Rightarrow a$ chia cho 40 dư 7 hay $a = 40l + 7\left(l \in \mathbb{N}^*, l \le 50\right)$

$\Rightarrow 24k + 17 = 40l + 7$
$\Leftrightarrow 40l - 24k = 10$
$\Leftrightarrow 20l - 12k = 5$
$\Leftrightarrow 4(5l - 3k) = 5$

Vô lý do $5l - 3k \in \mathbb{Z}$ và 5 không chia hết cho 4. Do đó giả sử sai

Vậy không có số nào được tô cả hai màu xanh và đỏ

Câu 6b

a được tô màu xanh $\Rightarrow a=24d_1+17\left(d_1\in\mathbb{N}^*; d_1\le\dfrac{2018-17}{24}\Rightarrow d_1\le 83\right)$

b được tô màu đỏ $\Rightarrow b=40d_2+7\left(d_2\in\mathbb{N}^*; d_2\le\dfrac{2018-7}{40}\Leftrightarrow d_2\le 50\right)$

Ta có $|a-b|=2\Leftrightarrow|40d_2+7-24d_1-17|=2\Leftrightarrow|40d_2-24d_1-10|=2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}40d_1-24d_2-10=2\\40d_1-24d_2-10=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}40d_2-24d_1=12\\40d_2-24d_1=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10d_2-6d_1=3\\5d_2-3d_1=1\end{array}\right.$

TH1: $10d_2-6d_1=3\Rightarrow 2(5d_2-3d_1)=3$

Vô lý vì $2(5d_2-3d_1)$ là số chẵn . Mà 3 là số lẻ

TH2: $5d_2-3d_1=1\Rightarrow d_1=\dfrac{5d_2-1}{3}$

Có $d_1<83\Rightarrow\dfrac{5d_2-1}{3}\le 83\Leftrightarrow d_2\le 50$

Vì $d_1\in\mathbb{Z}$ nên $5d_2\equiv 1(\bmod 3)$

TH1: $d_2\equiv 1(\bmod 3)\Leftrightarrow 5d_2\equiv 5(\bmod 3)\equiv 2(\bmod 3)$ (loại)

TH2: $d_2\equiv 2(\bmod 3)\Leftrightarrow 5d_2\equiv 10(\bmod 3)\equiv 1(\bmod 3)(tm)$

$\Rightarrow d_2=3k+2(k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow 1\le 3k+2\le 50\Leftrightarrow-\dfrac{1}{3}\le k\le 16(k\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow$ có 16 giá trị của k thỏa mãn

Với mỗi giá trị của k ta cho một giá trị của d_2, từ đó cho một giá trị của d_1 hay nói cách khác, với mỗi giá trị của k cho một cặp số $(d_1;d_2)$, tức là cho một cặp số $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy có 16 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.